数理解析研究所講究録
575巻 1985年 174-184

Knots と immersed disks

佐賀大学 丸本嘉彦 (Yoshihiko Marumoto)

1次元結び目は clasp singularities を持つような2次元 disk を"張る"ことは容易に示され, ribbon knot はいわゆる ribbon disk を張る。ここでは Seifert 多様体でなく, このような singularity を持つ disk と knot の関係について述べ, さらにこのことが Seifert 多様体とも関係があることについて述べる。 以下 PL カテゴリーあるいは C^∞ カテゴリーで考える。

これから考える knot は次で定義されるものである:

定義 1 $S^{n+2} = \partial D^{n+3}$ と見なして, $1 \leq p \leq n$ に対して $K^n \subset S^{n+2}$ が次をみたすとき <u>n-knot of type p</u> と言う:

D^{n+3} 上の trivial $(n-p+2)$-handles $\{h_i^{n-p+2}\}$ が存在して次をみたす

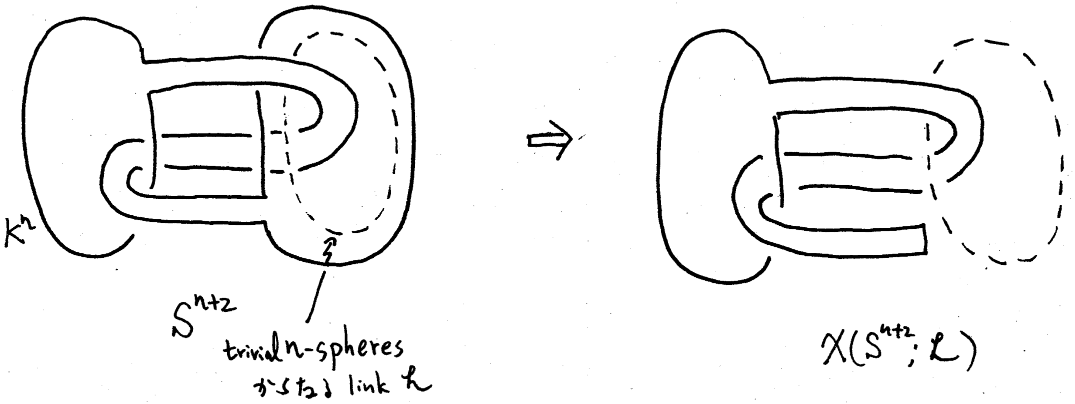
$$\begin{cases} (1) & K^n \cap h_i^{n-p+2} = \phi \quad \text{for } {}^\forall i \\ (2) & \partial(D^{n+3} \cup \bigcup_i h_i^{n-p+2}) \text{ 上で } K^n \text{ は } (n+1)\text{-disk を張る}. \end{cases}$$

ここで trivial handles $\{h_i^{n-p+2}\}$ とは attaching spheres $\{\alpha(h_i^{n-p+2})\}$ が trivial link をなし, attaching map がこの link の zero framing

をinduceするもののことを言う。

つまり　S^{n+2}内に$(n-p+1)$-spheresからなるtrivial link $\mathcal{L}$で，K^nが$\chi(S^{n+2};\mathcal{L})$内でunknotになるとき$K^n$をtype pと呼ぶ。（$\mathcal{L}$は$S^{n+2}-K^n$ではtrivial linkとは限らない）

Proposition 2　ribbon n-knotはtype 1である．



さらに次が成り立つ；

Theorem 3　すべての2-knotはtype 2である．

〈証明〉$K^2 \subset S^4$に対して

$^\exists \alpha_1, \cdots, \alpha_m$: simple closed curves in S^4-K^2

s.t. $\begin{cases} (1) & lk(K^2, \alpha_i)=0 \quad \text{for } ^\forall i \quad (\ lk(\ ) : \text{linking number}) \\ (2) & M=\chi(S^4;\{\alpha_i\}) \text{ としたとき, } \pi_1(M-K^2) \cong \mathbb{Z} \end{cases}$

は容易である．するとT. Matumoto [1]よりK^2は$M \# (\#_\mu S^2 \times S^2)$

内で 3-disk を bound する。これより明らか.

<u>Proposition 4</u>　$K^n \subset S^{n+2}$: n-knot of type p に対して次が成り立つ:

(＊1) D^{n+3} の trivial handle decomposition $D^{n+3} = D_0^{n+3} \cup \bigcup_i h_i^p \cup \bigcup_i h_i^{p+1}$ 及び (n+1)-disk $\Delta^{n+1} \subset \partial D_0^{n+3}$ が存在して次をみたす

$$\begin{cases} (1) & \Delta \cap h_i^p = \phi \quad \text{for } {}^\forall i \\ (2) & \partial\Delta \cap h_i^{p+1} = \phi \quad \text{for } {}^\forall i \\ (3) & (S^{n+2}, K^n) = (\partial D^{n+3}, \partial\Delta) \end{cases}$$

(ただし trivial handle decomposition とは $\{h_i^p\}$ が trivial handles であり, h_i^p, h_i^{p+1} が complementary handles であるものを言う.)

<証明>

$K^n \subset S^{n+2}$, $S^{n+2} = \partial D_1^{n+3}$, $\{h_i^{n-p+2}\}$: trivial handles on D_1^{n+3}

s.t. $\begin{cases} \text{(i)} & K^n \cap h_i^{n-p+2} = \phi \quad \text{for } {}^\forall i \\ \text{(ii)} & K^n \text{ は } \partial(D_1^{n+3} \cup \bigcup_i h_i^{n-p+2}) \text{ で (n+1)-disk } \Delta^{n+1} \text{ を bound する} \end{cases}$

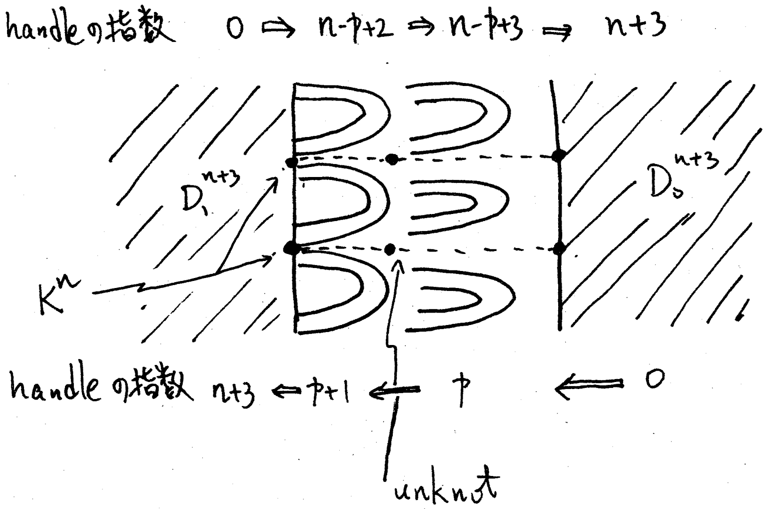
としておく。$\{h_i^{n-p+2}\}$ の triviality 及び上記 (ii) より

${}^\exists \{h_i^{n-p+3}\}$: $(n-p+3)$-handles on $D_1^{n+3} \cup \bigcup_i h_i^{n-p+2}$

s.t. $\begin{cases} \text{(iii)} & h_i^{n-p+2}, h_i^{n-p+3} \text{ は complementary handles} \\ \text{(iv)} & h_i^{n-p+3} \cap \Delta^{n+1} = \phi \quad \text{for } {}^\forall i \end{cases}$

となる。このとき $D_1^{n+3} \cup \bigcup_i h_i^{n-p+2} \cup \bigcup_i h_i^{n-p+3}$ に (n+3)-handle D_0^{n+3} を1個つけることにより S^{n+3} の handle decomposition が得

られる。この handle 分解を逆から見ることにより求めるものが得られる。



以下 2-knot のみについて話を限定することにする。

定義 5　W : 3次元多様体 $\subset S^4$

$\varphi : S^q \times D^{3-q} \longrightarrow \mathrm{int}\, W$: embedding　$(q \geqq 0)$

$\tilde{W} = W \underset{\varphi}{\cup} B^{q+1} \times D^{3-q}$,　$f : \tilde{W} \longrightarrow S^4$: a map

以上のとき $f(W \cup B^{q+1} \times \partial D^{3-q})$ を $f(W)$ から $f(B^{q+1} \times D^{3-q})$ (あるいは $f(B^{q+1} \times *)$ $* \in \mathrm{int}\, D^{3-q}$) に沿って surgery して得られると言い, $W \underset{\varphi}{\cup} B^{q+1} \times \partial D^{3-q}$ を $f(W \underset{\varphi}{\cup} B^{q+1} \times \partial D^{3-q})$ の support と呼び, $f(B^{q+1} \times *)$ をこの surgery の core と呼ぶ。

定義 6　$W^3 \subset S^4$ を orientable 3次元多様体で, $\partial W^3 \approx S^2$ とする。

次をみたすとき W を semi-unknotted of type 2 と呼ぶ：

$^\exists\{d_i^2\}$: disjoint 2-disks in S^4

s.t. (1) d_i^2 は W と transversal に交わり，

$\partial d_i \subset \mathrm{int}\, W$

(2) $\{d_i\}$ を core とする surgery によって

W から W' が得られたとき W' の support は 3-disk

（$\{\partial d_i^2\}$ を W の trivial system と呼ぶ。）

Theorem 7　$K^2 \subset S^4$ が 条件 (*1) in Prop. 4（ただし $n=2$, $p=2$）をみたしているとする。このとき

$^\exists W^3 \subset S^4$: semi-unknotted of type 2　s.t. $\partial W = K^2$

（証明は後で行う）

定義 8

(I)　$\rho : D^3 \longrightarrow S^4$ が次をみたすとき pseudo-ribbon map と呼ぶ

(1) $\rho|\partial D^3$: embedding

(2) $^\forall x \in D^3$,　$\# \rho^{-1}\rho(x) \leq 2$

(3) $\# \rho^{-1}\rho(x) = 2$ $(x \in D^3)$ のとき $^\exists N_1, N_2$: nbd of x in D^3

s.t. $\rho|N_1$, $\rho|N_2$: embedding

$\rho(N_1)$, $\rho(N_2)$ は transversal に交わる

(II)　p udo-ribbon map $\rho : D^3 \longrightarrow S^4$ が 次をみたすとき，type 2 であるという：

(4) $\{x \in D^{n+1} \mid \# \rho^{-1}\rho(x) = 2\}$ の components を $T_1^+, \cdots, T_1^-, \cdots$

としたとき次をみたす：

$$\begin{cases} (イ) & T_i^{\pm} \approx S^1 \times D^1, \quad T_i^+ \subset D^3 : \text{proper}, \quad T_i^- \subset \operatorname{int} D^3 \\ (ロ) & \rho|T_i^{\pm} : \text{embedding}, \quad \rho^{-1}\rho(T_i^+) = T_i^+ \cup T_i^- \\ (ハ) & \bigcup_i T_i^+ : \text{trivial in } D^3 - \bigcup_i T_i^- \end{cases}$$

ただし (ハ) は次を意味する：

$T_i^+ = S_i^1 \times D_i^1$ とおくとき

$\exists \{B_i^2 \times D_i^1\}$: disjoint in $D^3 - \bigcup_i T_i^-$

s.t. $\begin{cases} \partial B_i^2 \times D_i^1 = T_i^+ \\ B_i^2 \times D_i^1 \cap \partial D^3 = B_i^2 \times \partial D_i^1 \end{cases}$

以上の定義のもとで次が成り立つ：

<u>Theorem 9</u> $W^3 \subset S^4$: semi-unknotted of type 2

ならば $\exists \rho : D^3 \to S^4$: pseudo-ribbon map of type 2

s.t. $\partial W^3 = \rho(\partial D^3)$

Prop. 4, Th. 7, Th. 9 はいずれも逆が成り立つことは容易に確かめられる。

<u>Corollary 10</u> 2-knot K^2 に対して，$\rho(\partial D^3) = K^2$ となる pseudo-ribbon map ρ が存在する。

< Theorem 7 の証明 >

Prop. 4 の条件(*1) に $n=2$, $p=2$ とした記号を使用する。
$\alpha(h^r)$ で r-handle h^r の attaching sphere を表すとする。

今 $\alpha(h_1^3)$ と Δ^3 は transversal に交っているとしてよい。すると $\Delta^3 \cap \alpha(h_1^3) = \mathrm{int}\,\Delta^3 \cap \alpha(h_1^3)$ は有限個の simple closed curves からなり,

$$\Delta^3 \cap \alpha(h_1^3) = \{C_1, \cdots, C_\mu\} \qquad C_j : \text{simple closed curve}$$

とおく。$\alpha(h_1^3) \approx S^2$ であり各 C_j が $\alpha(h_1^3)$ に含まれていると見なして, δ_j : 2-disk in $\alpha(h_1^3)$ s.t. $\partial\delta_j = C_j$ を選んで, さらに

$$\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_\mu$$

の順序で innermost に並んでいるとしてよい,

i.e., $\forall j\ (1 \leq j \leq \mu)$, $C_j \cap \delta_k = \phi$ if $k<j$.

すると Δ^3 に対して δ_1 を core とする surgery を行うことにより W_1 が得られ, δ_2 を core とする surgery を行って W_2 が得られ, 以下このことをくり返すことにより

$$W_\mu \cap \alpha(h_1^3) = \phi, \quad \partial W_\mu = \partial\Delta^{n+1}$$

となる orientable 3-mfd が得られる。ここで W_μ を W と書くことにする。話を簡単にするため 2- および 3-handle は1個ずつである場合について議論する(一般の場合も全く同様である)。今までの話を正確に書くと次のようになる:

$^{\exists} f_i : \delta_i \times D^2 \longrightarrow \partial(D_0^5 \cup h_1^2)$: embedding

s.t.

(1) $f_i(\delta_i \times *) = \delta_i \quad (* \in \operatorname{int} D^2)$

$f_i(\delta_i \times D^2) \cap \alpha(h_1^3) = \delta_i$

(2) $W_0 = \Delta^3$

$W_{i-1} \cap f_i(\delta_i \times D^2) = f_i(\partial\delta_i \times D^2)$

W_i は W_{i-1} から δ_i を core とする surgery で得られる

となっている。

2-handle h_1^2 は embedding $h_1^2 : B^2 \times D^3 \longrightarrow D_0^5 \cup h^2$ と見なしてよい。h_1^2, h_1^3 は complementary handles なので次が成り立つ：

$^{\exists} g : D_0^5 \cup h_1^2 \longrightarrow D_0^5 \cup h_1^2$: homeomorphism

$^{\exists} D_0^2 \subset \partial D^3$

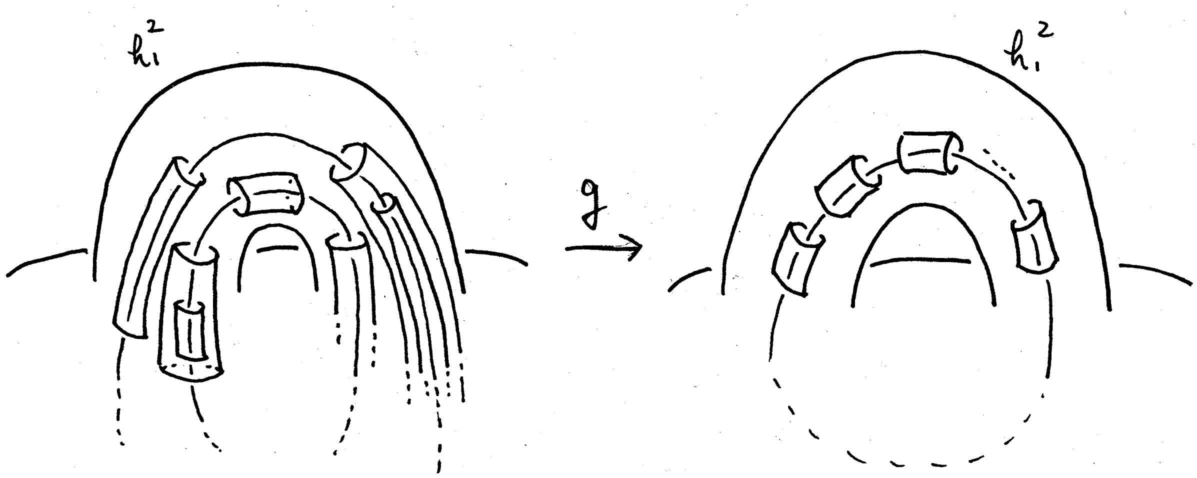
$^{\exists} B_1^2, \cdots, B_\mu^2 \subset \operatorname{int} B^2$: disjoint

such that

(1) $gf_i | \delta_i \times \partial D^2 = h_1^2 | B_i^2 \times \partial D_0^2$

ただし $\delta_i \times \partial D^2$ と $B_i^2 \times \partial D_0^2$ を同一視する

(2) $h_1^2(B^2 \times *) \subset g\alpha(h_1^3) \quad (* \in \operatorname{int} D_0^2)$



ここで　$\tilde{D}_0^2 = cl(\partial D^3 - D_0^2)$,

$\tilde{f}_i = g^{-1} \circ (h_i^2 | B_i^2 \times \tilde{D}_0^2)$

とおくと　$\tilde{f}_i : B_i^2 \times \tilde{D}_0^2 \longrightarrow \partial(D_0^5 \cup h_i^2) - \alpha(h_i^3)$　: embedding

s.t.　$\tilde{f}_i | B_i^2 \times \partial\tilde{D}_0^2 = f_i | \delta_i \times \partial D^2$

となりこのことは　W は $\{\hat{f}_i(z_i \times \partial\hat{D}_0^2)\}$ $(z_i \in \mathrm{int}\, B_i^2)$ を trivial system として semi-unknotted of type 2 であることを示している。

＜Theorem 9 の証明＞

$W^3 \subset S^4$ を semi-unknotted of type 2 としたとき，定義より次は容易：

<u>Lemma 11</u>

$\exists\, \varphi_i : \partial B^2 \times D^2 \longrightarrow \mathrm{int}\, D^3$　: disjoint embeddings

$\left(\tilde{W} = \left(D^3 - \bigcup_i \varphi_i(\partial B^2 \times D^2)\right) \underset{\{\varphi_i\}}{\cup} \bigcup_i (B^2 \times \partial D^2)_i \text{ とおく} \right)$

$\exists\, f : \tilde{W} \longrightarrow S^4$: embedding　with $f(\tilde{W}) = W$

$\exists\, \bar{\varphi}_i : B^2 \times D^2 \longrightarrow S^4$: disjoint embedding

s.t. (1) $\bar{\varphi}_i(B^2 \times \partial D^2) = f((B^2 \times \partial D^2)_i)$

$\bar{\varphi}_i | \partial B^2 \times \partial D^2 = f \circ \varphi_i | \partial B^2 \times \partial D^2$

(2) $\bar{\varphi}_i(* \times D^2)$ は W と transversal に交わる $(* \in \mathrm{int}\, B^2)$

ここで W の trivial system は $\{\bar{\varphi}_i(* \times \partial D^2)\}$ である。

すると pseudo-ribbon map $\rho: D^3 \longrightarrow S^4$ で次を満たすものが自然に得られる：

$$\rho(D^3) = f\left(D^3 - \bigcup_i \varphi_i(\partial B^2 \times D^2)\right) \cup \bigcup_i \overline{\varphi}_i(\partial B^2 \times D^2).$$

ここで ρ の self-intersection の部分を調べて見る。そのため次が必要となる（明らかなので証明は省略する）：

Lemma 12　$D^3 - \bigcup_i \varphi_i(\partial B^2 \times D^2)$ は次の handle 分解をもつ：

$$\partial\left(\bigcup_i \varphi_i(\partial B^2 \times D^2)\right) \times I \cup (\text{1-handles}) \cup (\text{2-handles})$$

仮定より
$$\partial\left(\bigcup_i \varphi_i(\partial B^2 \times D^2)\right) \times I \cap \bigcup_i \overline{\varphi}_i(\partial B^2 \times D^2)$$
$$= \left(\partial\left(\bigcup_i \varphi_i(\partial B^2 \times D^2)\right) \cap \bigcup_i \overline{\varphi}_i(\partial B^2 \times D^2)\right) \times I$$

と思える。すると general position の議論から

$$(\text{cores of 1-handles}) \cap \bigcup_i \overline{\varphi}_i(* \times D^2) = \phi \quad (* \in \text{int}\, B^2)$$

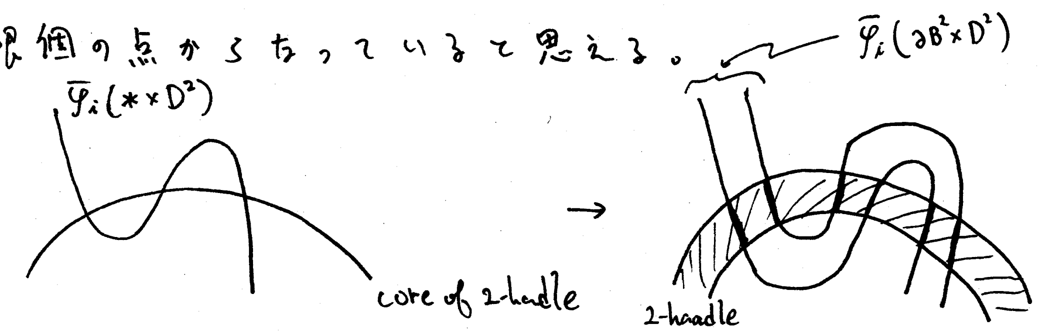
とできる，つまり

$$(\text{1-handles}) \cap \bigcup_i \overline{\varphi}_i(\partial B^2 \times D^2) = \phi$$

としてよい。一方

$$(\text{cores of 2-hadle}) \cap \bigcup_i \overline{\varphi}_i(* \times D^2)$$

は有限個の点からなっていると思える。



以上のことより self-intersection

$$f(D^3 - \bigcup_i \varphi_i(\partial B^2 \times D^2)) \cap \bigcup_i \bar{\varphi}_i(\partial B^2 \times D^2)$$

をよく見ると定義8-(ii)を満たしていることは容易に確かめられる。

[Remark]

Prop. 4, Th. 7, Th. 9 は先に述べたように逆が成り立つことも証明でき，さらにもって一般次元に拡張した形で述べることが可能である。

References

[1] T. Matumoto: On a weakly unknotted 2-sphere in a simply-connected 4-manifold, Osaka J. Math. 21(1984) 489-492